შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

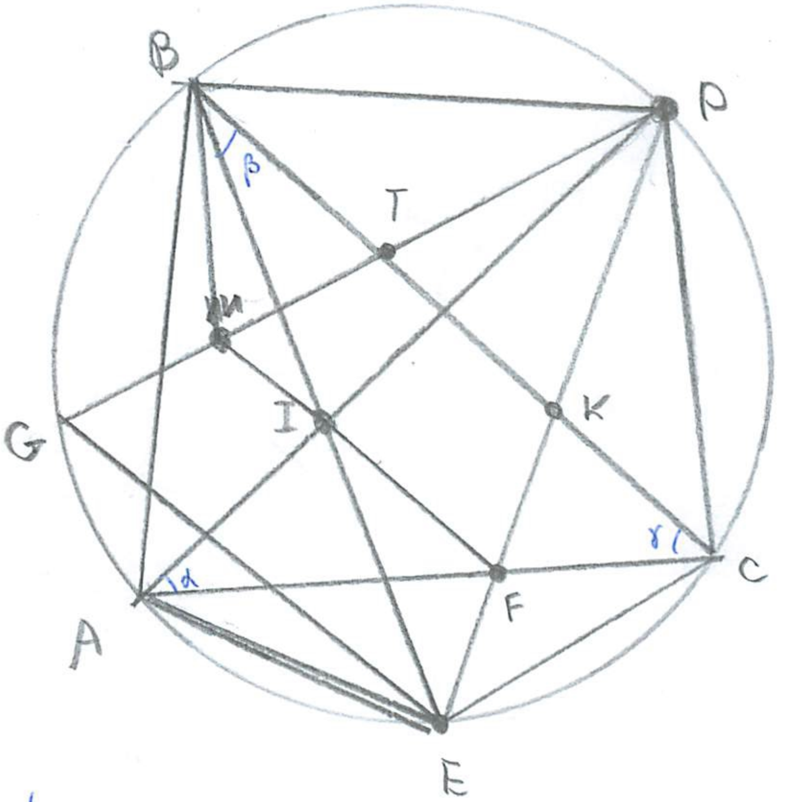
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

25.04.2015/ მათ/III/ 608

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



ვთქვათ $\angle ADC=\alpha$ და $\angle EBC=\beta$. და $\angle ACB=\gamma$.

რადგან AI ბისექტრისაა $\breve{BD}=\breve{DC}=2\alpha$.

$\angle BED=\frac{\breve{BD}}{2}=\alpha$. შევნიშნოთ რომ $\square AIFE$ არის

ჩახაზვადი რადგანაც $\angle IAF=\angle IEF$ და ეყრდნობა IE მონაკვეთს.

ამიტომაც $\angle AFI=\angle AEI=\frac{\breve{AB}}{2}=\frac{2\gamma}{2}=\gamma$.

ასევე შევნიშნოთ რომ $\angle EGD=\frac{\breve{EC}+\breve{DC}}{2}=\frac{2\alpha+2\beta}{2}=\alpha+\beta$.

რადგან $FH \parallel EG$ ⇒ $\angle FHD = \angle EGD = \alpha+\beta$.

ასევე $\angle ECA = \frac{\breve{AE}}{2} = \angle ABE = \beta$ და $\angle DEC = \frac{\breve{DC}}{2} = \angle DAC = \alpha$.

ამიტომ $\angle KFC = \angle DEC + \angle ACE = \alpha+\beta$.

ასევე $\angle EDC = \frac{\breve{EC}}{2} = \angle EBC = \beta$ და $\angle BCD = \frac{\breve{BD}}{2} = \angle BAD = \alpha$.

საიდანაც $\angle FKC = \alpha+\beta$.

რადგან $\angle THF + \angle FKT = \angle THF + 180 - \angle FKC = 180^\circ$

□ HTKF ციკლურია.

$\angle HFK = 180^\circ - \angle AFE - \angle KFC = 180^\circ - \gamma - \alpha - \beta$.

რადგანაც $\gamma + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ $\angle HFK = \alpha+\beta$.

$\angle TKD = \angle FKC = \alpha+\beta$ ანუ $KHF \parallel BC$. და

რადგანაც $\angle THF = \angle KFH$ □HTKF გამოდის ტოლფერდა ტრაპეცია.

$\angle HTB = \angle THF = \alpha+\beta = \frac{\breve{GB}+\breve{DC}}{2} = \frac{\breve{GB}+2\alpha}{2}$.

ამიტომ $\breve{GB} = 2\beta$ ანუ $\angle BDT = \angle KDC = \beta$.

რადგან $\angle DBC = \angle BCD$ და $\angle BDT = \angle DKC$ და $|BD| = |DC|$

გამომდინარე $\triangle BTD = \triangle DKC$ საიდანაც $|BT| = |KC|$

რადგან $|BT| = |KC|$ და $|HT| = |FK|$ და $\angle HTB = \angle FKC$
ამიტომაც $\triangle HTB \cong \triangle FKC$ ანუ $\angle BHT = \angle KFC = \alpha + \beta = \angle HFD$
რადგან $\angle BHD = \angle HFD$ BH $\triangle HFD$-ზე შემოხაზული
წრეწირის მხებია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14 | 25.04.2015/ მათ/III/ 608

ამოცანა № 2 | გვერდი № 1

პირველ რიგში შევნიშნოთ რომ თუ a_n ან $b_n < \frac{1}{2}$. $a_{n+1} > a_n$ და $b_{n+1} > b_n$ და პირიქით თუ $a_n \geq \frac{1}{2}$ და $b_n \geq \frac{1}{2}$ $a_{n+1} < a_n$ და $b_{n+1} < b_n$. ანუ აქ რომელიმე სვლაზე ვაჩვენეთ, რომ $a_n < \frac{1}{2}$ და $b_n \geq \frac{1}{2}$ მიღებული პირობა a_{n+1} და b_{n+1}-ისთვის შესრულდება. დავუშვათ საწინააღმდეგო რომ ყოველთვის $a_n < \frac{1}{2}$ და $b_n \geq \frac{1}{2}$ ან $a_n \geq \frac{1}{2}$ $b_n \geq \frac{1}{2}$.

განვიხილოთ $a_n \cdot b_n$ ნამრავლი თუ ვაჩვენებთ რომ $a_n \cdot b_n = \frac{1}{4}$ რომელიმე n-ისთვის მიღებული პირობა შესრულდება რადგან $b_n > a_n$ (ვიცით რომ $b > a$) ანუ $a_n < \frac{1}{2}$, ხოლო $b_n > \frac{1}{2}$. ეხლა დავამტკიცოთ, რომ $a_n \cdot b_n$ ყოველ ნაბიჯზე უახლოვდება $\frac{1}{4}$.

ვთქვათ $a_n \cdot b_n = \frac{1}{4} + x$ ანუ $a_n \geq \frac{1}{2}$ და $b_n \geq \frac{1}{2}$.

მაშინ $a_{n+1}\cdot b_{n+1}=a_n^2\cdot b_n^2=\left(\frac14+x\right)^2$

ახლა ვაჩვენოთ რომ $\frac14-x\le\left(\frac14+x\right)^2\le\frac14+x$

$\frac14-x\le\frac1{16}+\frac12x+x^2$

$0\le x^2+\frac{3x}{2}-\frac{3}{16}=\left(x+\frac{\sqrt3}{2}\right)^2-1$

რადგან $x\ge0$ ~~და~~ $\cancel{\frac{\sqrt3}{2}}$ ეს უტოლობა სწორია

$\left(\frac14+x\right)^2\le\frac14+x.$

$\frac14+x\le1.$

$a_n\cdot b_n\le1$ ასევე სწორია. (რადგან ორივე სწორია [illegible] $\frac14-1$)

ახლა ვაჩვენოთ $a_n\cdot b_n=\frac14-x$

მაშინ $a_n<\frac12$ $b_n<\frac12.$

$a_{n+1}\cdot b_{n+1}=\left(a_n+\frac12\right)\left(b_n+\frac12\right)=a_n\cdot b_n+\frac12(a_n+b_n)+\frac14=$

$\frac12-x+\frac12(a_n+b_n)\ge\frac12-x+\sqrt{a_n\cdot b_n}=\frac12-x+\sqrt{\frac14-x}.$

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

25.04.2015/ მათ/III/ 608

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\frac{1}{4}+x \geq \frac{1}{2}-x+\sqrt{\frac{1}{4}-x}$.

$2x - \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{4}-x}$

$4x^2 - x + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{4} - x$

$4x^2 - 2x - \frac{1}{64} \geq 0$

$(2x-\frac{1}{2})^2 - \frac{17}{64} \geq 0$

ეს გამოსახულება ჭეშმარიტია ყველა x-ებისათვის, ხოლო რადგანაც სვეტი უსასრულოდ მცირდება ასეთ x-ს რომ ჭეშმარიტად $a_n \cdot b_n$ ტოლდება $\frac{1}{4}$-ის მიმდევრობის. რადგან სასრული სვეტის ჭეშმარიტ $a_n \cdot b_n$ ყოველთვის იქნება $\frac{1}{4}$-ის მიმდევრობის ~~ამიტომ~~ $\lim(a_n \cdot b_n) = \frac{1}{4}$ რაც ამოცანის პირობა ყველა n-ისათვის.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

25.04.2015/ მათ/III/ 608

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3$

ცხადია ეს გამოსახულება სიმეტრიულია x და y-ის მიმართ.

დავუშვათ $x=y$ მაშინ

$x^2=1$.

$x_1=1$

$x_2=-1$.

განვიხილოთ გამოსახულების მარცხენა და მარჯვენა მხარის ნაშთი 7-ზე გაყოფისას $7x^2$ და $7y^2$ 7-ზე იყოფა, ხოლო -13 7-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს -1 ანუ

$7x^2-13xy+7y^2\equiv xy \pmod 7$

ახლა განვიხილავთ $(7k+1)^3$ $(7k+2)^3$ ... $(7(k+1))^3$ რიცხვებს, რომ ნაშთად მათი 7-ზე გაყოფის ნაშთს გვაძლევს $1, -1, 0$ ანუ ა) $xy\equiv 1 \pmod 7$

ბ) $xy\equiv -1 \pmod 7$

გ) $xy\equiv 0 \pmod 7$ უნდა განვიხილოთ ეს სამი შემთხვევა.

პას: $x=y=1$, $x=y=-1$.